به نام زندگی

www.dr-haghbin.info

چند مثال از احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال ۱- فرض کنیم مسابقه‌ای ترتیب داده شده است که در آن خانواده‌هایی حق برگزاری شرکت کنند که دست کم یک فرزند دختر داشته باشند. اگر بدانیم خانواده X سه فرزند دارند و در مسابقه شرکت کرده‌اند. احتمال این پیش آمد را حساب کنید که هر سه فرزند

خانواده x ، دختر باشند.

(g,g,g)

A : پیش آمد اینکه هر سه فرزند خانواده x دختر باشند

B : خانواده x سه فرزند دارد و دست کم یک فرزند دختر دارند

$$\underset{b,g}{\_}\quad \underset{b,g}{\_}\quad \underset{b,g}{\_}$$

$$\Omega - \{b,b,b\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{1}{7}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

مثال ۲ - در جعبه‌ای ۴ توپ قرمز و ۶ توپ آبی داریم. دو توپ را به صورت متوالی (بدون جایگذاری) از جعبه در می‌آوریم، احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند را به دست بیاورید.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!} \quad 1}{\frac{10!}{2!\,8!}} = \frac{2\times 3}{5\times 9}$$

* این مسئله را می‌توانستیم با کمک رابطه زنجیره‌ای نیز حل کنیم (کاربرد رابطه زنجیره‌ای در حل مسائل احتمال)

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

(۲)

اولی قرمز   دومی قرمز

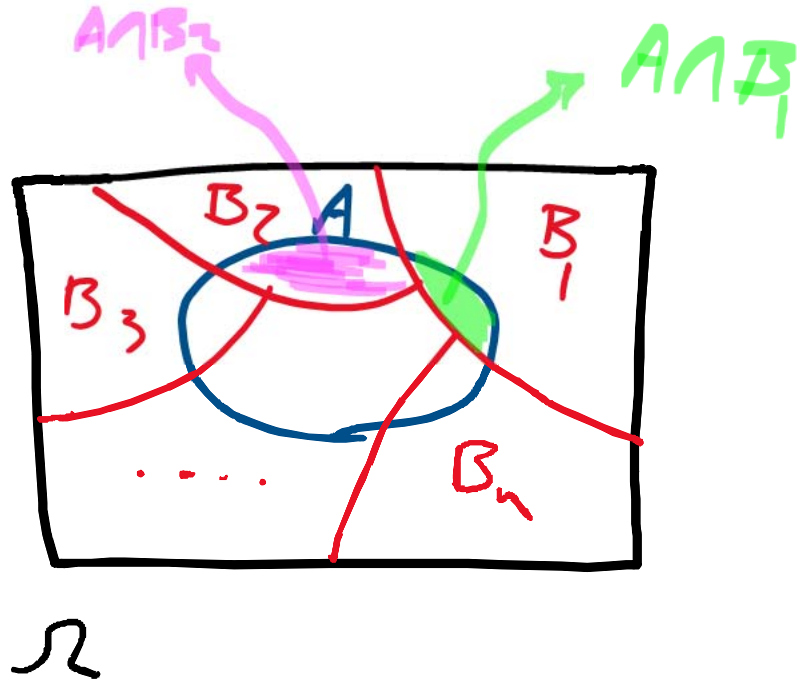
$$P(g_1 \cap g_2) = P(g_1)\,P(g_2|g_1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$$

علاوه بر رابطه زنجیره‌ای ، روابط دیگری نیز وجود دارند که در حل مسائل پیچیده‌تر احتمال به ما کمک می‌کنند. در ادامه با دو رابط پرکاربرد در این زمینه آشنا می‌شویم.

* تجزیه احتمال کلی

تجزیه احتمال کلی در حل مسائل احتمال که پارامترهای متعددی در آنها تاثیرگذار هستند، به ما کمک می‌کند.

اگر بخواهیم احتمال پیش آمد A را حساب کنیم ، میدانیم که پیش آمدهای $B_1, B_2, \ldots, B_n$ یک افراز روی فضای نمونه هستند، می توانیم به صورت زیر احتمال



پیش آمد A را به دست بیاوریم

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \ldots \cup (A \cap B_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

$$\Longrightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \varphi$$

$$\forall i \neq j$$

$$\overset{\text{استفاده از رابطه زنجیره‌ای}}{\Longrightarrow} \quad P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

قضیه احتمال کل

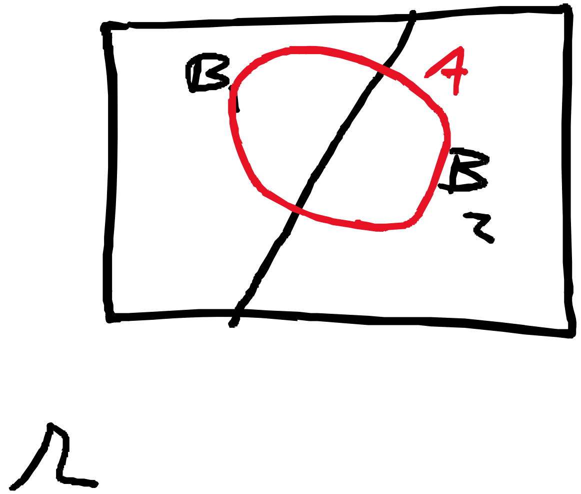
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A|B_i)$$

مثال: فرض کنیم دو جعبه حاوی ترانزیستور داریم. در جعبه‌ی اول 2 ترانزیستور خراب و 8 ترانزیستور سالم وجود دارد و در جعبه دوم 6 ترانزیستور خراب و 9 ترانزیستور سالم وجود دارد. یکی از جعبه‌ها را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک ترانزیستور از آن بر می‌داریم. احتمال اینکه ترانزیستور انتخاب شده، خراب باشد چقدر است؟

A : پیش آمد خراب بودن ترانزیستور

B_1 : انتخاب جعبه اول

B_2 : انتخاب جعبه دوم



$$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) = \overbrace{P(B_1)}^{1/2}P(A|B_1) + \overbrace{P(B_2)}^{1/2}P(A|B_2)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A|B_i) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{10} + \frac{1}{2}\times\frac{6}{15}$$

* در مسأله قبل اگر ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد، احتمال اینکه آن را از جعبه دوم برداشته باشیم (جعبه دوم را انتخاب کرده باشیم) چیست؟

$$P(B_2 | A) = ?$$

$$= \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(B_2)\,P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(B_i)\,P(A|B_i)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{15}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{15}} = \frac{2/5}{3/5} = 2/3 > 1/2$$

* به طور کلی برای محاسبه‌ی احتمال پیش آمدهای به فرم $P(B_j|A)$ که به آنها احتمالات پسین یا پس از مشاهده می‌گوییم، از فرمول Bayes استفاده می‌کنیم.

احتمال پیشین
پیش از مشاهده

$$\underbrace{P(B_j|A)}_{\text{احتمال پس از مشاهده}} = \frac{\overbrace{P(B_j)P(A|B_j)}^{P(A\cap B_j)}}{P(A)} = \frac{\overbrace{P(B_j)}P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

قضیه احتمال کل

A Posteriori Probability

A Priori Prob.

$$P(S_i \mid A) = ?$$

$$\max P(S_i \mid A) \longrightarrow S_i$$

* در مثال قبل $P(B_1 \mid A)$ را بدست بیاورید:

$$P(B_1 \mid A) = 1 - P(B_2 \mid A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

مثال: سه سکه C_1 و C_2 و C_3 را در اختیار داریم. می‌دانیم که سکه C_1 سالم است و دو طرف سکه‌ی C_2 شیر است و دو طرف سکه C_3 خط است. یکی از این سه سکه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و آن را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه‌ی آزمایش، شیر باشد، احتمال اینکه سالم را انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

$$P(C_1|H)=?$$

$P(H|C_1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(H|C_2) = 1$ $\quad$ $P(H|C_3) = 0$

$P(T|C_1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(T|C_2) = 0$ $\quad$ $P(T|C_3) = 1$

احتمال پیشین

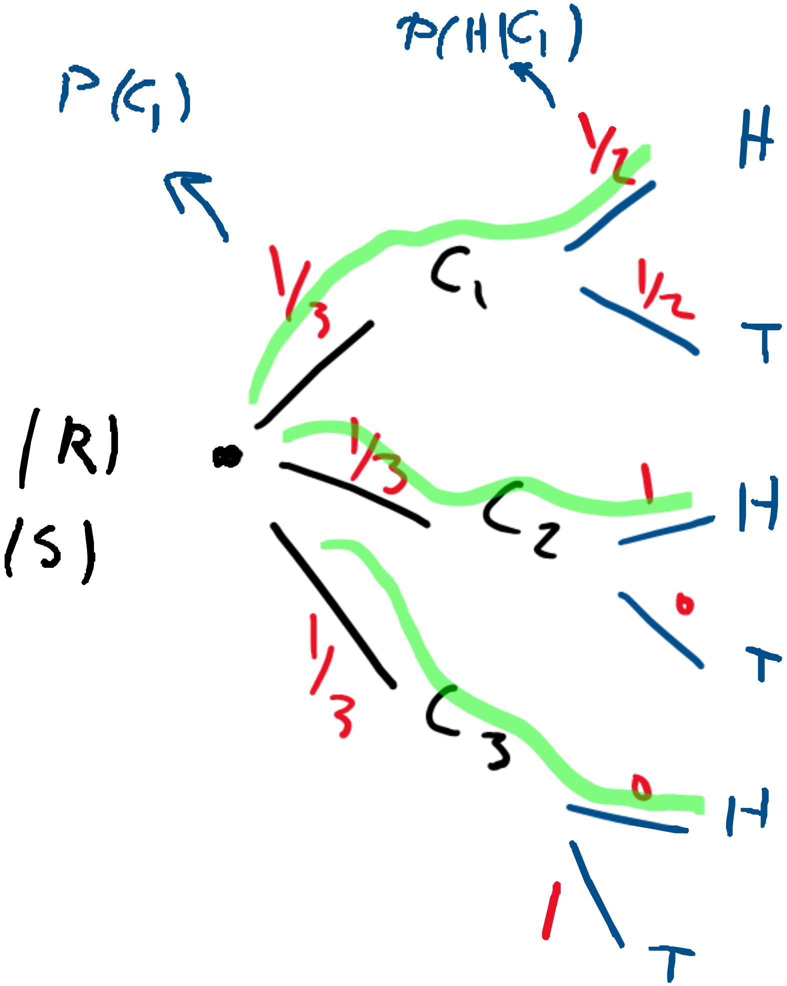
$$\underbrace{P(C_1|H)} = \frac{P(H|C_1)\,\overbrace{P(C_1)}}{\sum_{i=1}^{3} P(C_i)\,P(H|C_i)} = \frac{1/2 \times 1/3}{1/3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0}$$

احتمال پسین

(به دلیل تقارن مسأله)

$$= \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} = P(C_1)$$

* برای استفاده از قضیه احتمال کلی و فرمول بیز می‌توانیم از مفهوم درخت نیز استفاده کنیم و مسئله را ساده‌تر حل کنیم.



$$P(H)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0$$

قضیه احتمال کلی

مثال: کانال باینری متقارن Binary Symmetric Channel (BSC)

یکی از مدل‌های متداول برای کانال‌های انتقال در سیستم‌های مخابرات دیجیتال، کانال باینری متقارن است. در این کانال، اطلاعات ارسالی، بیت‌های '0' و '1' در نظر گرفته می‌شوند. همان طور که می‌دانیم وقتی اطلاعات را روی یک کانال مخابراتی می‌فرستیم، به دلیل خرابی‌های موجود در کانال (امنیت، نویز، تداخل، چندمسیری و...)

اطلاعات دریافتی با خطا همراه است. در کانال باینری متقارن، این خرابی ها با احتمال گذار P مدل سازی می شود. به عبارت دیگر احتمال اینکه در فرستنده بیت '0' بفرستیم ولی در گیرنده بیت '1' دریافت شود (و بالعکس) برابر P است.

$\left(P < \frac{1}{2}\right)$

1- احتمال خطا برای کانال BSC به دست بیاورید. $P(\epsilon) \equiv P_e$

2- اگر در گیرنده بیت '0' دریافت شده باشد، احتمال اینکه فرستنده نیز بیت '0' را فرستاده باشد، حساب کنید!

فرستنده

Transmitter

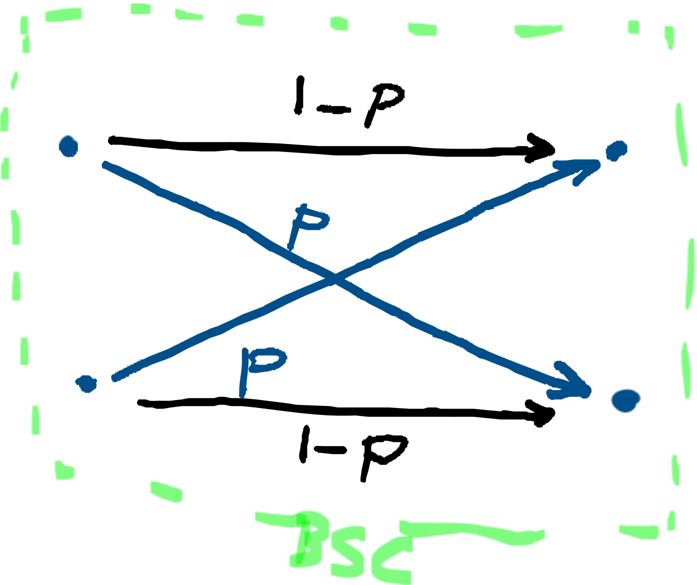
کانال باینری متقارن

گیرنده

Receiver

$P_0 = 1 - P_1$ 0

P_1 1



0

1

$P(T_0) = P_0 = 1 - P_1$

$P(T_1) = P_1$

$$\begin{cases} P(R_0 | T_1) = P \\ P(R_1 | T_1) = 1 - P \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(R_1 | T_0) = P \\ P(R_1 | T_0) = 1 - P \end{cases}$$

T_0 : فرستنده بیت '0' بفرستد

T_1 : فرستنده بیت '1' بفرستد

R_0 : گیرنده بیت '0' دریافت کند.

R_1 : گیرنده بیت '1' دریافت کند.

1) محاسبه احتمال خطا $P(\epsilon) \equiv P_e$

پیش آمد خطا $= \epsilon =$ (اینکه فرستنده بیت '0' را منتشر کند و گیرنده بیت '1' را دریافت کند) یا (فرستنده بیت '1' را منتشر کند و گیرنده بیت '0' را دریافت کند)

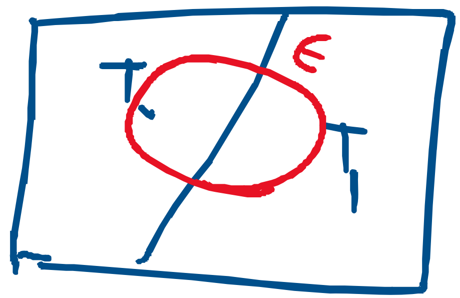
$$\epsilon = (T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)$$

$$\Rightarrow P(\epsilon) = P(T_0 \wedge R_1) + P(T_1 \wedge R_0)$$

$$\Rightarrow P(\epsilon) = P(T_0)\,P(R_1 \mid T_0) + P(T_1)\,P(R_0 \mid T_1)$$

قضیه احتمال کل

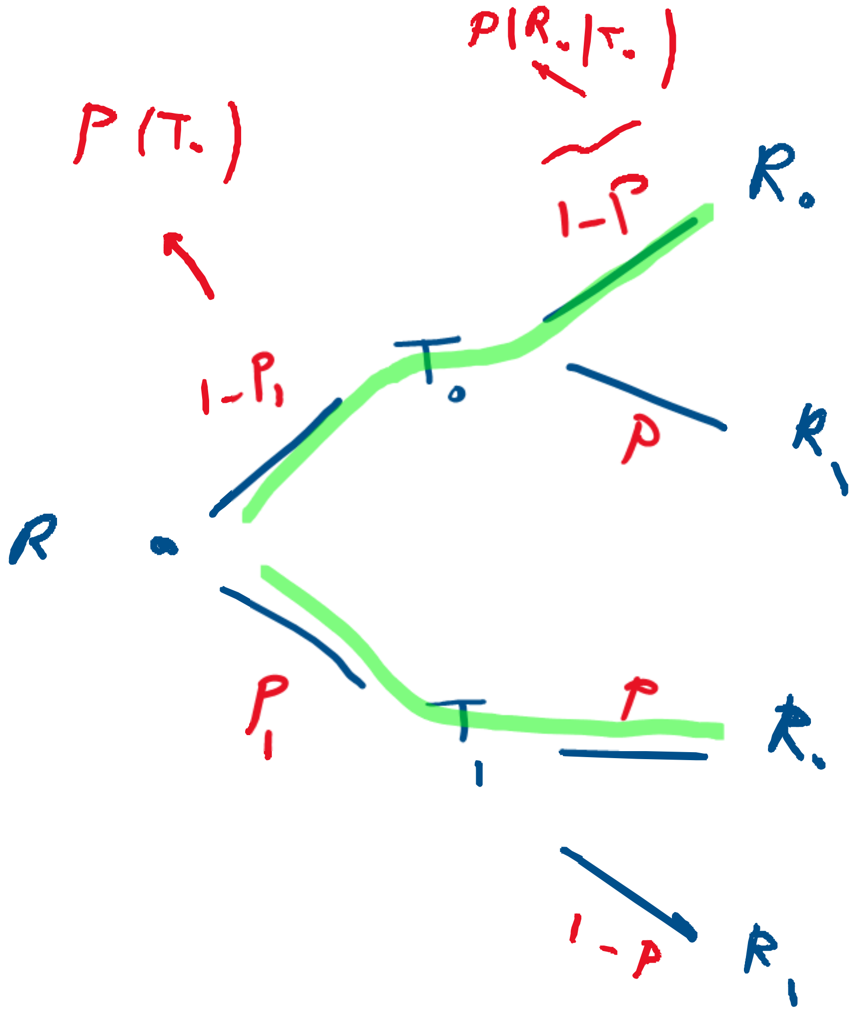
$$\Rightarrow P_e \equiv P(\epsilon) = (1-P_1)P + P_1 P = P$$



$$\underbrace{P(T_0 \mid R_0)}_{\text{احتمال پسین یا پس از مشاهده}} = \frac{P(T_0)\,P(R_0 \mid T_0)}{P(R_0)} \qquad (2$$

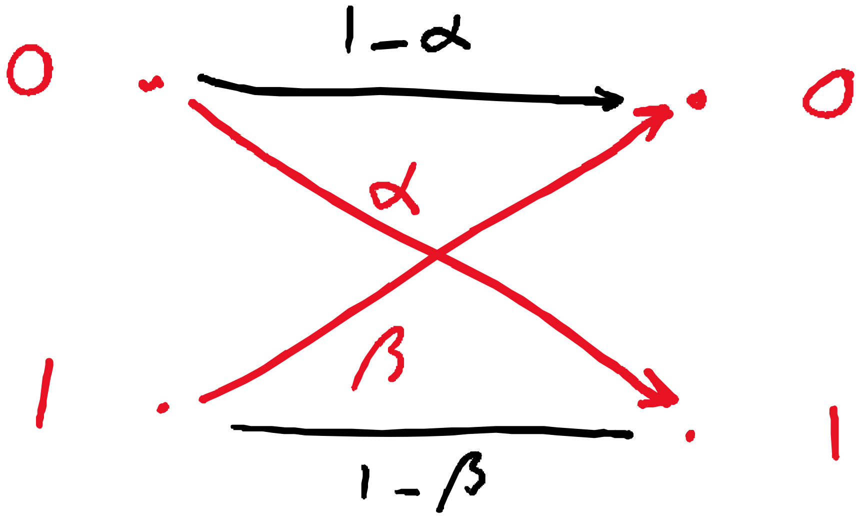
$$= \frac{P(T_0)\,P(R_0 \mid T_0)}{\underbrace{P(T_0)\,P(R_0 \mid T_0) + P(T_1)\,P(R_0 \mid T_1)}_{\sum_{i=0} P(T_i)\,P(R_0 \mid T_i)}} = \frac{(1-P_1)(1-p)}{(1-P_1)(1-p) + P_1 p}$$

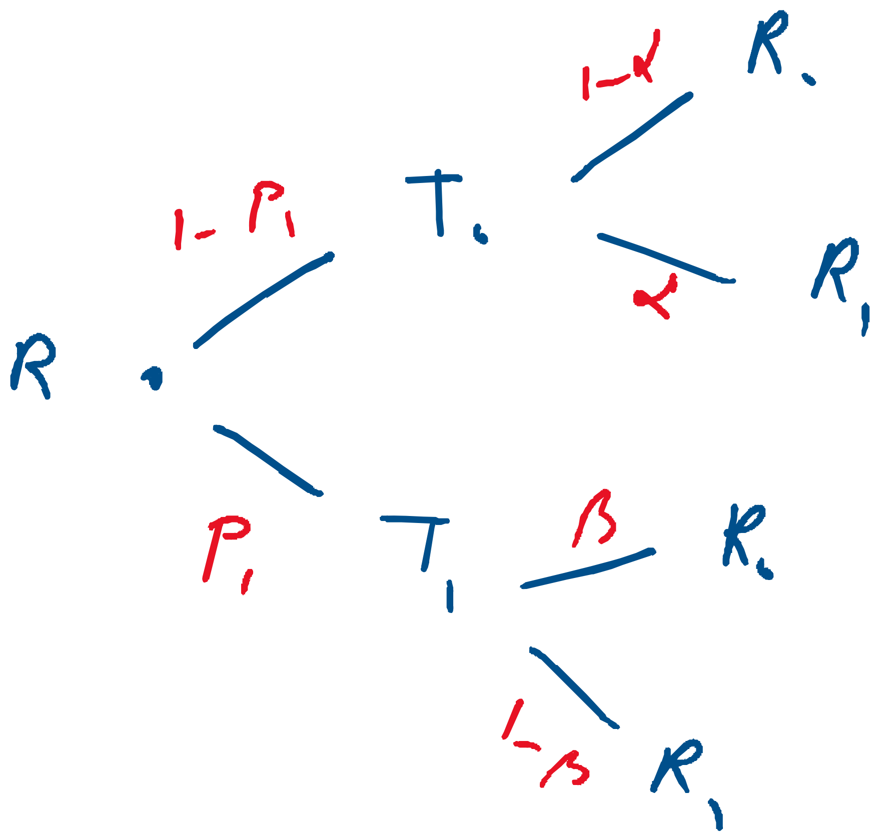
$$P(T_1 \mid R_0) = 1 - P(T_0 \mid R_0)$$

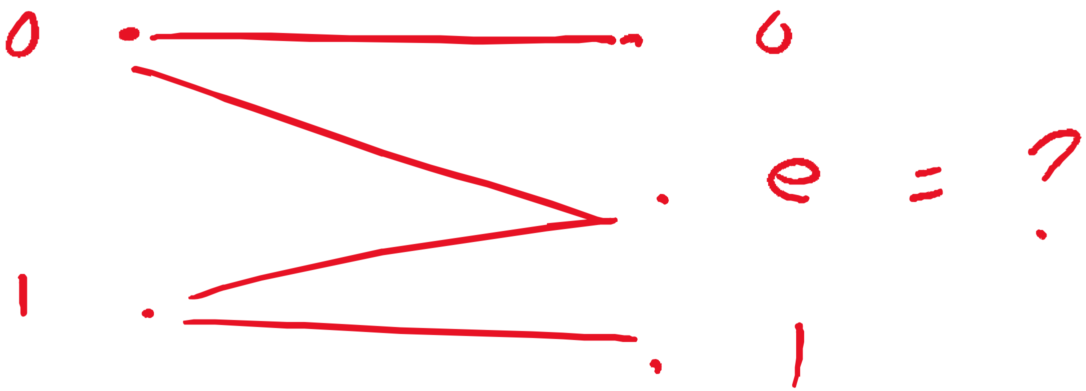


$$P(R_0) = (1-P_1)(1-P) +$$
$$P P_1$$

۸ مسئله قبل را برای کانال زیر حل کنید




R_0
$1-P_1$
P_1
T_0
T_1
$1-\alpha$
α
β
$1-\beta$
R_0
R_1
R_0
R_1



e 0.1

ε 0.3